Стопка пластин
$\preccurlyeq$
(черновик)

автор[1]

[1] *Город*

Аналитически решается одномерная задача о падении плоской электромагнитной волны по нормали на стопку пластин с анизотропией холестерического типа, куда включена диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость, проводимость гипотетических магнитных зарядов. Приводится алгоритм для численной реализации решения (калькулятор).

Ключевые слова: стопка пластин, холестерики, уравнения Максвелла, одномерная задача.

Аналитическая задача о распространении плоской волны в холестерическом жидком кристалле (ХЖК) вдоль оси холестерической спирали

Осью холестерической спирали называется такая линия в пространстве, на которую «наматывается» вектор-директор $\mathbf{n}$. Величиной q обозначается пространственная частота вращения директора.

Если ось направить вдоль O_z, то в любой точке некоторой плоскости, параллельной O_{xy}, вектор-директор $\mathbf{n}$ неизменен:

$$n_x(z) := \cos(qz + \varphi_0), \quad n_y(z) := \sin(qz + \varphi_0), \quad n_z(z) := 0, \tag{1}$$

Работа в рамках ...

где q, φ_0 – константы холестерической спирали. Именно таким пространственным распределением вектора $\mathbf{n}$ и характеризуются жидкие кристаллы холестерического типа (ХЖК).

Задача о распространении плоской волны в ХЖК вдоль оси холестерической спирали в литературе решается с применением теоремы Флоке. Здесь же приведен другой ход решения (не встреченный в литературе для данной задачи), основанный на применении приема вращения системы координат синхронно с вращением вектора-директора. Кроме того, в тензорах диэлектрической и магнитной проницаемостей, переходя от вещественных чисел к комплексным, выписывается несколько более общий случай (по сравнению со встреченными в литературе решениями): анизотропия поглощения, как электрических (дихроизм), так и магнитных компонент поля, что может оказаться полезным при изучении свойств метаматериалов.

Задача формулируется следующим образом. Пусть среда описывается вектором-директором $\mathbf{n}$, распределенным согласно (1), и четырьмя комплексными числами: $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, $\mu_\perp$, $\mu_\parallel$. Тензоры $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ при этом имеют вид:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} := \varepsilon_\perp \delta_{\alpha\beta} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) n_\alpha n_\beta, \quad \mu_{\alpha\beta} := \mu_\perp \delta_{\alpha\beta} + (\mu_\parallel - \mu_\perp) n_\alpha n_\beta, \tag{2}$$

где n_α - декартовы координаты единичного вектора-директора $\mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1$, описывающего анизотропию, $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера. Гармоническое во времени электромагнитное поле с круговой частотой ω имеет пространственную зависимость только от координаты z:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{h}(z) \exp(i\omega t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{e}(z) \exp(i\omega t). \tag{3}$$

Значения $\mathbf{h}\Big|_{z=z_0}$, $\mathbf{e}\Big|_{z=z_0}$ известны. С помощью уравнений Максвелла требуется найти компоненты поля в произвольной координате z в произвольный момент времени t.

Здесь отметим, что знак временной фазы «$i\omega t$» выбран положительным: так, как его принято выбирать в англоязычной литературе. При выборе отрицательного знака: «$-i\omega t$», принятого в русскоязычной литературе, итоговый ответ получается комплексносопряженный: $\mathbf{E}_{eng} = \mathbf{E}^*_{rus}$, $\mathbf{H}_{eng} = \mathbf{H}^*_{rus}$.

Далее приводится ход решения задачи. Сначала задача обезразмеривается с использованием двух констант: скорости света в вакууме $\widetilde{c}$ и некоторой удобной длины $\widetilde{l}$, а также некоторого характерного значения электрического поля $\widetilde{E}_0$. Формулы перехода от размерных величин (с волной) к безразмерным:

$$\mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{E}}/\widetilde{E}_0,\ \mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}/\widetilde{E}_0,\ z = \widetilde{z}/\widetilde{l},\ t = \widetilde{t}\cdot\widetilde{c}/\widetilde{l},\ \omega = \widetilde{\omega}\cdot\widetilde{l}/\widetilde{c},\ \sigma = \widetilde{\sigma}\cdot 4\pi\widetilde{l}/\widetilde{c},\ q = \widetilde{q}\cdot\widetilde{l}. \tag{4}$$

При этом отметим, что реальные части констант $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, $\mu_\perp$, $\mu_\parallel$ равны соответствующим диэлектрическим и магнитным проницаемостям, а соответствующие проводимости σ в безразмерном виде участвуют в задаче в виде:

$$\mathrm{Im}(\varepsilon_\perp) = -\sigma_\perp^{el}/\omega,\ \mathrm{Im}(\varepsilon_\parallel) = -\sigma_\parallel^{el}/\omega,\ \mathrm{Im}(\mu_\perp) = -\sigma_\perp^{mag}/\omega,\ \mathrm{Im}(\mu_\parallel) = -\sigma_\parallel^{mag}/\omega.$$

Далее, в обезразмеренные уравнения Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\hat{\mu}(\mathbf{r})\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

подставляется поле (3). Из подстановки прямо следует:

$$e_z \equiv 0, \quad h_z \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = [z]\mathbf{a}, \tag{5}$$

где:

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ h_x \\ h_y \end{pmatrix}, [z] := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\omega\mu_{yx} & -i\omega\mu_{yy} \\ 0 & 0 & i\omega\mu_{xx} & i\omega\mu_{xy} \\ i\omega\varepsilon_{yx} & i\omega\varepsilon_{yy} & 0 & 0 \\ -i\omega\varepsilon_{xx} & -i\omega\varepsilon_{xy} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензоров $\varepsilon_{\alpha,\beta}$, $\mu_{\alpha,\beta}$ имеют зависимость по z, что усложняет решение системы уравнений (5). Однако, периодический характер зависимости, в силу теоремы Флоке, позволяет искать решение в известном виде [**?**, **?**]. Здесь же мы предлагаем оригинальный ход решения, замечая, что матрица $[z]$ перестает зависеть от z если в выражении (5) записать компоненты поля в системе координат, которая вращается синхронно с вектором-директором (см. ф-лу (1)).

Для перехода во вращающуюся систему координат используется матрица поворота:

$$[z) := \begin{pmatrix} \cos(qz+\varphi_0) & -\sin(qz+\varphi_0) & 0 & 0 \\ \sin(qz+\varphi_0) & \cos(qz+\varphi_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(qz+\varphi_0) & -\sin(qz+\varphi_0) \\ 0 & 0 & \sin(qz+\varphi_0) & \cos(qz+\varphi_0) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

При этом обозначения таковы, что обратная матрица $(z] := [z)^{-1}$.

Обозначения для матриц «4×4», состоящие из буквы, открывающей и закрывающей скобок выбраны для удобства, по аналогии с обозначениями квантовой механики: $\langle bra||c||ket\rangle$.

В этих обозначениях компактно записывается преобразование уравнения (5) из представления в декартовой неподвижной системе координат в представление в декартовой вращающейся системе координат:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dz} = [z]\mathbf{a} \quad \to \quad (z]\frac{d\mathbf{a}}{dz} = (z][z]\mathbf{a} \quad \to \quad \frac{d(z]\mathbf{a}}{dz} - \frac{d(z]}{dz}\mathbf{a} = (z][z]\mathbf{a} \quad \to$$

$$\to \quad \frac{d(z]\mathbf{a}}{dz} = (z][z]\mathbf{a} + \frac{d(z]}{dz}\mathbf{a} \quad \to \quad \frac{d(z]\mathbf{a}}{dz} = (z][z][z)(z]\mathbf{a} + \frac{d(z]}{dz}[z)(z]\mathbf{a} \quad \to$$

$$\to \quad \frac{d(z]\mathbf{a}}{dz} = \left((z][z][z) + \frac{d(z]}{dz}[z)\right)(z]\mathbf{a}.$$

Обозначив

$$(z]\mathbf{a} =: \mathbf{b}, \quad \left((z][z][z) + \frac{d(z]}{dz}[z)\right) =: (m),$$

где вычисленная матрица (m) в явном виде:

$$(m) := \left((z][z][z) + \frac{d(z]}{dz}[z)\right) = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & -i\omega\mu_\perp \\ -q & 0 & i\omega\mu_\parallel & 0 \\ 0 & i\omega\varepsilon_\perp & 0 & q \\ -i\omega\varepsilon_\parallel & 0 & -q & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

уравнение (5) во вращающейся системе координат приобретает вид:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dz} = (m)\mathbf{b}, \tag{8}$$

общее решение которого, в силу того, что матрица (m) не зависит от переменной z имеет известный вид:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{\beta}_i \exp(\lambda_i z), \tag{9}$$

где λ_i — собственные значения матрицы (m), $\vec{\beta}_i$ — собственные векторы матрицы (m), соответствующие собственным значениям, c_i — произвольные константы, которые в каждом конкретном случае находятся из заданных граничных условий задачи (например, при $z = 0$). Собственные значения вычисляются из биквадратного уравнения: $|(m) - \lambda E| = 0$. В явном виде собственные значения:

$$\lambda = \pm i\sqrt{\eta \pm \tau}, \tag{10}$$

где

$$\eta = \frac{\omega^2}{2}(\varepsilon_\perp \mu_\parallel + \varepsilon_\parallel \mu_\perp) + q^2,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\omega^4}{4}(\varepsilon_\perp \mu_\parallel - \varepsilon_\parallel \mu_\perp)^2 + \omega^2 q^2 (\varepsilon_\perp \mu_\parallel + \varepsilon_\parallel \mu_\perp + \varepsilon_\perp \mu_\perp + \varepsilon_\parallel \mu_\parallel)}.$$

Собственные векторы вычисляются из уравнения: $(m)\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta}$.

Выражение (9) можно переписать в виде:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{4} c_i \vec{\beta}_i \exp(\lambda_i z) := (\beta\}\{z\rangle \mathbf{c}, \tag{11}$$

где матрицы $(\beta\}$, $\{z\rangle$ определены следующим образом (порядок индексов безусловно важен):

$$\{z\rangle := \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\lambda_3 z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\lambda_4 z) \end{pmatrix},$$

$$(\beta\} := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \vec{\beta}_3 & \vec{\beta}_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы, как и раньше, обозначаются при помощи обратного порядка скобок: $\langle z\} := \{z\rangle^{-1}$, $\{\beta) := (\beta\}^{-1}$. Присутствие символа z в обозначениях, означает зависимость матрицы от координаты.

С учетом определения вектора $\mathbf{b} := (z]\mathbf{a}$, используя форму записи (11), записывается вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = [z)(\beta\}\{z\rangle \mathbf{c},$$

или, определяя для краткости

$$[z\rangle := [z)(\beta\}\{z\rangle, \tag{12}$$

итоговое выражение:

$$\mathbf{a} = [z\rangle \mathbf{c}. \tag{13}$$

Из (13) выражается вектор $\mathbf{c}$ через заданные значения вектора $\mathbf{a}_0$ в точке $z = z_0$:

$$\mathbf{c} = \langle z_0]\mathbf{a}_0.$$

Откуда получается выражение для вектора $\mathbf{a}$ в произвольной координате z через известное значение в точке $z = z_0$:

$$\mathbf{a} = [z\rangle\langle z_0]\mathbf{a}_0. \tag{14}$$

Что касается собственных векторов $\vec{\beta}$, то можно отметить следующее: каждой базисной электромагнитной волне соответствует один собственный вектор. Базисные волны отличаются направлением фазовой скорости во вращающейся системе координат: «вправо/влево» (знак собственного числа λ) и поляризацией (линейной: «O_x/O_y» (при $q = 0$) или же круговой: «по часовой стрелке/против часовой стрелки» (при $q \neq 0$)) — независимых базисных волн должно быть четыре, чтобы описывать электромагнитное поле данной задачи.

Аналитическая задача прохождения плоской волны через слой ХЖК

Формулировка задачи

Плоская волна с частотой ω падает по нормали на слой ХЖК толщины: $z_1 - z_0$, с осью холестерической спирали вдоль O_z, ограниченный справа ($z = z_1$) и слева ($z = z_0$) изотропными средами. Требуется найти электромагнитное поле во всем пространстве, если известны: частота ω, поляризация и амплитудное значение электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны, а также заданы оптические параметры сред (таб. 1).

среда «1»	среда «2» (слой ХЖК)	среда «3»
$z_{l,1} = -\infty$	$z_{l,2} = z_0$	$z_{l,3} = z_1$
$z_{r,1} = z_0$	$z_{r,2} = z_1$	$z_{r,3} = +\infty$
$\varphi_{0,1} = 0$	$\varphi_{0,2} = 0$	$\varphi_{0,3} = 0$
$q_1 = 0$	$q_2 = q$	$q_3 = 0$
$\varepsilon_{\perp,1} = \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \geqslant 1$	$\varepsilon_{\perp,2} = \varepsilon_\perp \in \mathbb{C}$	$\varepsilon_{\perp,3} = \varepsilon_3 \in \mathbb{R} \geqslant 1$
$\varepsilon_{\parallel,1} = \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \geqslant 1$	$\varepsilon_{\parallel,2} = \varepsilon_\parallel \in \mathbb{C}$	$\varepsilon_{\parallel,3} = \varepsilon_3 \in \mathbb{R} \geqslant 1$
$\mu_{\perp,1} = \mu_1 \in \mathbb{R} \geqslant 1$	$\mu_{\perp,2} = \mu_\perp \in \mathbb{C}$	$\mu_{\perp,3} = \mu_3 \in \mathbb{R} \geqslant 1$
$\mu_{\parallel,1} = \mu_1 \in \mathbb{R} \geqslant 1$	$\mu_{\parallel,2} = \mu_\parallel \in \mathbb{C}$	$\mu_{\parallel,3} = \mu_3 \in \mathbb{R} \geqslant 1$

Таблица 1: Параметры сред для вычисления компонент полей в задаче со слоем ХЖК.

Поясним обозначения параметров (таб. 1). Задача решается в безразмерных величинах (см. (4)). Символами z_l, z_r обозначены координаты левой и правой границы среды. Далее, что касается второй среды, слоя ХЖК, то начальный угол холестерической спирали $\varphi_{0,2}$ (рис. **??**) можно положить равным нулю всегда, полагая, что в нашей власти выбрать систему координат так, чтобы ось O_x совпадала с направлением вектора $\mathbf{n}$ при $z = 0$ (невзирая на то, что по условию задачи слой ХЖК может не содержать $z = 0$). Параметры второй среды не снабжены индексом «2», чтобы не загромождать запись. Комплекснозначность параметров второй среды выбрана, чтобы подчеркнуть то, что, вообще говоря, аналитическое решение допускает такие параметры: есть возможность учесть анизотропное поглощение и даже «экзотическое» поглощение за счет проводимости гипотетических магнитных зарядов, что может оказаться полезным в свете современного интереса к метаматериалам.

Несколько пояснений и определений

В этой задаче поляризация падающей волны влияет на ответ значительно. В частности, оказывается, что от поляризации падающей волны (правая круговая поляризация или левая круговая поляризация) зависят коэффициенты отражения и прохождения слоя ХЖК.

Поэтому задача решается для двух падающих волн с линейной поляризацией: вектор $\mathbf{E}$ имеет только x-компоненту (O_x-поляризация) и вектор $\mathbf{E}$ имеет только y-компоненту (O_y-поляризация). Из этих двух базовых решений, пользуясь свойством суперпозиции полей, можно собрать решение для падающей волны с любой эллиптической поляризацией, наперед заданной условием конкретной задачи.

Далее несколько слов о векторе $\mathbf{c}$. Матрицу $[z\rangle$ для изотропной среды можно записать так, что выражение (13): $\mathbf{a} = [z\rangle\mathbf{c}$, будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\rho z} & 0 & e^{i\omega\rho z} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\rho z} & 0 & e^{i\omega\rho z} \\ 0 & -e^{-i\omega\rho z}\cdot\rho/\mu & 0 & e^{i\omega\rho z}\cdot\rho/\mu \\ e^{-i\omega\rho z}\cdot\rho/\mu & 0 & -e^{i\omega\rho z}\cdot\rho/\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\rho = \sqrt{\varepsilon\mu}$, если среда без поглощения. При конструировании матрицы $[z\rangle$: (12), выбор первоначального порядка собственных чисел и, соответственно, собственных векторов находится в нашей власти. Для изотропных сред матрица (m) имеет два собственных числа λ кратности «два», каждому собственному числу соответствует два независимых собственных вектора $\vec{\beta}$ — следует выбрать порядок двух собственных чисел и для каждого числа упорядочить два собственных вектора. Для того, чтобы матрица $[z\rangle$ имела удобный вид: (15), нужно выбрать конкретный порядок собственных чисел в матрице $\{z\rangle$ и конкретный порядок собственных векторов в матрице $(\beta\}$.

В случае, если матрица $[z\rangle$ сконструирована в виде: (15), об интерпретации компонент вектора $\mathbf{c}$ стоит отметить следующее. Матрица $[z\rangle$ состоит из столбцов, с компонентами поля, описывающих базовые плоские волны с единичной амплитудой электрической компоненты, отличающиеся направлением распространения энергии и поляризацией. Это значит, что, к примеру, вектор $\mathbf{c} = (1, 0, 0, 0)$ определяет вектор $\mathbf{a}$, компоненты которого описывают электромагнитную волну, распространяющуюся вправо и с линейной поляризацией O_x (напомним, что временная фаза выбрана с положительным знаком). В целом, компоненты вектора $\mathbf{c}$ равны амплитудным значениям электрической компоненты всех базовых волн в строго определенном порядке.

Итак, конкретный вид матрицы $[z\rangle$ (15) нужен для удобства дальнейших вычислений. Такая матрица обуславливает удобный порядок компонент вектора $\mathbf{c}$, — из них далее будут составляться прямоугольные матрицы, над которыми будут проводиться алгебраические операции.

Далее о связи векторов $\mathbf{c}$ в соседних средах. На границе раздела двух сред обязано выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент поля:

$$\mathbf{a}^{«1»}(z = z^*) = \mathbf{a}^{«2»}(z = z^*), \tag{16}$$

где верхним индексом в кавычках обозначены номера соседствующих сред, $z = z^*$ — координата плоскости границы. В каждой из сред должны выполняться уравнения Максвелла, и, соответственно, имеет место решение (13). Поэтому (16) можно представить так:

$$[z^*\rangle^{«1»}\mathbf{c}^{«1»} = [z^*\rangle^{«2»}\mathbf{c}^{«2»}.$$

Откуда следует связь векторов $\mathbf{c}$ в соседних средах:

$$\mathbf{c}^{«1»} = \langle z^*]^{«1»}[z^*\rangle^{«2»}\mathbf{c}^{«2»}. \tag{17}$$

Явный вид матрицы $\langle z]$, обратной к матрице $[z\rangle$, для изотропной среды:

$$\langle z] := \langle z\}\{\beta)(z] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\omega\rho z} & 0 & 0 & e^{i\omega\rho z}\cdot\mu/\rho \\ 0 & e^{i\omega\rho z} & -e^{i\omega\rho z}\cdot\mu/\rho & 0 \\ e^{-i\omega\rho z} & 0 & 0 & -e^{-i\omega\rho z}\cdot\mu/\rho \\ 0 & e^{-i\omega\rho z} & e^{-i\omega\rho z}\cdot\mu/\rho & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\rho = \sqrt{\varepsilon\mu}$, если среда без поглощения.

Стоит отметить, что в выражениях (15, 18) величина ρ записана для случая без поглощения: $\operatorname{Im}\varepsilon = 0$, $\operatorname{Im}\mu = 0$. Если же имеется ненулевая электрическая проводимость σ: $\operatorname{Im}\varepsilon = -\sigma/\omega$, то

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu}}{r\sqrt{2}}\left(\varepsilon_\circ\sqrt{\varepsilon_\circ + r} + \frac{\sigma}{\omega}\sqrt{r-\varepsilon_\circ} + i\left(\varepsilon_\circ\sqrt{r-\varepsilon_\circ} - \frac{\sigma}{\omega}\sqrt{\varepsilon_\circ + r}\right)\right),$$

при

$$r = \sqrt{\varepsilon_\circ^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2},$$

где $\varepsilon_\circ = \operatorname{Re}\varepsilon$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Возвращаясь к формуле (15), отметим, что вообще, изотропная среда позволяет нам задать любые, не равные нулю, вещественные значения q и φ_0. В частности, если q положить равной длине волны в среде, то это приводит к базовым волнам не с линейной, а с круговой поляризацией.

Решение задачи

Имеется три среды. Третья среда отличается тем, что, при любых условиях, в ней отсутствуют волны, распространяющиеся влево — у вектора $\mathbf{c}^{«3»}$ последние две компоненты равны нулю: $\mathbf{c}^{«3»} = (c_1^3, c_2^3, 0, 0)$. По условию задачи известна поляризация падающей волны, т.е. достаточно решить две задачи: из первой среды падает волна, поляризованная по O_x (тогда на первом месте единица, на втором месте ноль и неизвестные пока амплитуды отраженных волн: $\mathbf{c}^{«1»} = (1, 0, c_3^1, c_4^1)$), из первой среды падает волна, поляризованная по O_y (тогда на первом месте ноль, на втором единица, и далее неизвестные пока амплитуды отраженных волн: $\mathbf{c}^{«1»} = (0, 1, c_3^1, c_4^1)$).

Выразим вектор $\mathbf{c}^{«1»}$ через $\mathbf{c}^{«3»}$, используя (17). Выражение (17) на границах: $z = z_0$, $z = z_1$:

$$\mathbf{c}^{«1»} = \langle z_0]^{«1»}[z_0\rangle^{«2»}\mathbf{c}^{«2»}, \quad \mathbf{c}^{«2»} = \langle z_1]^{«2»}[z_1\rangle^{«3»}\mathbf{c}^{«3»}.$$

Откуда следует, что

$$\mathbf{c}^{«1»} = \langle z_0]^{«1»}[z_0\rangle^{«2»}\langle z_1]^{«2»}[z_1\rangle^{«3»}\mathbf{c}^{«3»},$$

или, в более компактных обозначениях:

$$\mathbf{c}^{«1»} = \langle U\rangle\mathbf{c}^{«3»}, \tag{19}$$

где

$$\langle U\rangle := \langle z_0]^{«1»}[D][z_1\rangle^{«3»}, \tag{20}$$

при
$$[D] := [z_0\rangle^{«2»}\langle z_1]^{«2»}. \tag{21}$$

Сразу для двух задач, выражение (19) можно записать так:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \langle U\rangle \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

При этом матрица $\langle U\rangle$ известна (20). И для решения осталось записать выражения для восьми чисел: r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} и t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}. Здесь заметим, что линейная комбинация решений тоже является решением: мы вправе совершать линейные операции с векторами $\mathbf{c}$ — со столбцами. Поэтому принудительно выберем специфические, удобные векторы $\mathbf{c}^{«3»}$: $(1, 0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0, 0)$, и выразим через них векторы $\mathbf{c}^{«1»}$, посредством (19):
$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которое приведем к виду: (22), через линейные комбинации со столбцами — нам нужны единицы и нули слева. Линейные комбинации со столбцами производятся умножением справа на матрицу 2×2. Так, умножив предыдущее выражение справа на T:
$$T := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

получим нужный вид: (22), и, как бы между прочим, получим и то, что требуется: искомые выражения для коэффициентов t, r, через элементы матрицы $\langle U\rangle$.
$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad \to$$
$$\to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \langle U\rangle \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} =: R. \tag{24}$$

Итак, первый столбец в (22) выражает решение для падающей волны, поляризованной по O_x, а второй столбец — по O_y. Теперь известны $\mathbf{c}^{«1»}$ и $\mathbf{c}^{«3»}$, и чтобы найти $\mathbf{c}^{«2»}$ можно использовать, например, (17).

Далее, имея два полных набора векторов $\mathbf{c}$ во всех трех средах (два решения) можно единообразно комбинировать эти наборы для получения нужной в задаче поляризации падающей волны:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{c}^{«1»}_{need} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{c}^{«1»}_{Ox} & \mathbf{c}^{«1»}_{Oy} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \hat{A}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{c}^{«2»}_{need} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{c}^{«2»}_{Ox} & \mathbf{c}^{«2»}_{Oy} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \hat{A}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{c}^{«3»}_{need} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{c}^{«3»}_{Ox} & \mathbf{c}^{«3»}_{Oy} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \hat{A},$$

где $\hat{A}$ — некоторая единая матрица «2×2», описывающая одинаковые для всех сред линейные комбинации столбцов.

По значению вектора $\mathbf{c}$ в соответствующей среде находится поле в любой координате z в пределах границ среды из (13).

Отметим, что в данной работе матрицы для второй анизотропной среды — $[z\rangle^{«2»}$, $\langle z]^{«2»}$, — вычисляются численно, в соответствии с определениями матриц: ищутся собственные числа λ и собственные векторы $\vec{\beta}$, составляются соответствующие матрицы (порядок собственных чисел и собственных векторов какой-то есть, но он нас не интересует настолько, насколько интересовал порядок в крайних изотропных средах), для каждой $z \in [z_0, z_1]$ матрицы перемножаются, в случае необходимости находятся обратные матрицы. В случае же вычисления коэффициентов пропускания и отражения, поле внутри пластины знать не нужно, поэтому матрицы вычисляются только в двух граничных точках.

Отражение и пропускание плоской волны стопкой пластин ХЖК

Вместо одного слоя ХЖК возможно решить задачу для некоторого конечного числа слоев N с различными оптическими свойствами — для стопки пластин.

В этом случае лишь усложняется вычисление матрицы $[D]$, присутствующей в определении матрицы $\langle U\rangle$: (20). После вычисления $\langle U\rangle$ дальнейшие операции для нахождения r, t выглядят в точности также, как и для одного слоя ХЖК.

Алгоритм для вычисления коэффициентов отражения и пропускания следующий. Для каждой пластинки составляется матрица (m): (7). Для матрицы (m) находятся собственные числа и собственные векторы. Из собственных чисел и собственных векторов составляется матрица $[z\rangle$ на левой границе пластинки, при $z = z_l$: $[z_l\rangle$ и обратная матрица $\langle z]$ на правой границе пластинки, при $z = z_r$: $\langle z_r]$. Далее вычисляется матрица $[D]$, как последовательное произведение соответствующих матриц $[z\rangle$ и $\langle z]$ в порядке следования слоев вдоль O_z:

$$[D] = [z^1_{Left}\rangle^{«1»}\langle z^1_r]^{«1»} \ldots [z^i_l\rangle^{«i»}\langle z^i_r]^{«i»}[z^{i+1}_l\rangle^{«i+1»}\langle z^{i+1}_r]^{«i+1»} \ldots [z^N_l\rangle^{«N»}\langle z^N_{Right}]^{«N»}, \tag{25}$$

где верхний индекс обозначает номер среды, и кроме того, отметим, что правая граница z^i_r совпадает с левой границей следующей пластинки z^{i+1}_l — пластины всегда располагаются вплотную (случившийся зазор из вакуума в данной задаче представляется как изотропная пластина — частный упрощенный случай анизотропной пластины холестерического типа). Далее, из (20) находится матрица $\langle U\rangle$, включающая матрицы $\langle z_{Left}]^{«0»}$ и $[z_{Right}\rangle^{«N+1»}$ для ограничивающих стопку изотропных полубесконечных сред — явный вид матриц представлен в (15) и (18). Далее находятся матрицы R и T из (24), (23). Далее отдельно выписываются векторы $\mathbf{c}$ для падающей («I»), отраженной («R») и прошедшей («T») волн, для двух случаев линейной поляризации (x, y):

$$\mathbf{c}_{x,I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{x,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{11} \\ r_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{x,T} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\mathbf{c}_{y,I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{y,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{y,T} = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

После чего, по формуле (13) вычисляются компоненты поля (вектор $\mathbf{a}$): e_x, e_y, h_x, h_y. При этом матрица $[z\rangle$ для падающей и отраженной волны берется в левой изотропной среде, обозначаемой номером «0», а для прошедшей волны — в правой изотропной среде, обозначаемой номером «$N+1$». Координата z при этом должна принадлежать соответствующим средам, включая границы: z_{Left}, z_{Right}. Если нужна не линейная поляризация падающей волны, а круговая (правая «r» или левая «l»), то соответствующие компоненты поля выражаются по формулам:

$$\mathbf{a}_{r,I} = \mathbf{a}_{x,I} + i\mathbf{a}_{y,I}, \quad \mathbf{a}_{r,R} = \mathbf{a}_{x,R} + i\mathbf{a}_{y,R}, \quad \mathbf{a}_{r,T} = \mathbf{a}_{x,T} + i\mathbf{a}_{y,T}. \tag{28}$$

$$\mathbf{a}_{l,I} = \mathbf{a}_{x,I} - i\mathbf{a}_{y,I}, \quad \mathbf{a}_{l,R} = \mathbf{a}_{x,R} - i\mathbf{a}_{y,R}, \quad \mathbf{a}_{l,T} = \mathbf{a}_{x,T} - i\mathbf{a}_{y,T}. \tag{29}$$

Найденные компоненты поля используются для вычисления усредненного по периоду колебаний электромагнитной волны значения вектора Пойнтинга:

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \langle \mathrm{Re}[\mathbf{E}] \times \mathrm{Re}[\mathbf{H}] \rangle = \frac{1}{4} \left(\mathbf{e} \times \mathbf{h}^* + \mathbf{e}^* \times \mathbf{h} \right), \tag{30}$$

имеющего в данной задаче ($e_z \equiv 0$, $h_z \equiv 0$) только z-компоненту. Вычислив $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ для падающих, $\langle \mathbf{S}(t) \rangle_I$, отраженных, $\langle \mathbf{S}(t) \rangle_R$, и прошедших, $\langle \mathbf{S}(t) \rangle_T$ волн, находятся коэффициенты отражения R и прохождения T:

$$T_\alpha = \frac{|\langle \mathbf{S} \rangle_{T,\alpha}|}{|\langle \mathbf{S} \rangle_{I,\alpha}|}, \quad R_\alpha = \frac{|\langle \mathbf{S} \rangle_{R,\alpha}|}{|\langle \mathbf{S} \rangle_{I,\alpha}|}, \tag{31}$$

где α обозначает поляризацию падающей волны. При этом коэффициент поглощения, A (в случае без поглощения — это ошибка вычисления), находится из закона сохранения энергии:

$$A + T + R = 1.$$

На этом описание алгоритма завершено.

Следует отметить вычислительную особенность для пластинок с поглощением (или крайних сред с поглощением). Если в стопке пластинок имеется пластинка с поглощением ($\sigma \neq 0$), то в показателях экспонент (имеющих место в матрицах) появляются реальные числа, которые зависят от z. И несмотря на то, что пластинка тонкая и поглощение слабо, — только за счет того, что пластинка находится далеко от начала координат, экспонента может оказаться численно невычислима. Потому имеет смысл для каждой такой пластинки вводить свою локальную систему координат, с локальным нулем по z' включенным в область пластинки, или, скажем, на левой границе пластинки. Это ничему не противоречит: матрицы позволяет перемножать не единая координатная ось, а условие равенства тангенциальных компонент на границах сред: (16).

Дополнительно приведем явный вид матрицы $[D_k] := [z_l\rangle^{«k»}\langle z_r]^{«k»}$ для изотропной пластинки, с номером «k», толщины d_k и параметрами: $q = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\mu_\perp = \mu_\parallel = \mu \in R$, $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = \varepsilon - i\sigma/\omega$, при $\varepsilon, \sigma, \omega \in R$:

$$[D_k] = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & iS\mu/\rho \\ 0 & C & -iS\mu/\rho & 0 \\ 0 & -iS\rho/\mu & C & 0 \\ iS\rho/\mu & 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

где

$$C = \frac{e^{i\omega\rho d_k} + e^{-i\omega\rho d_k}}{2}, \quad S = \frac{e^{i\omega\rho d_k} - e^{-i\omega\rho d_k}}{2i},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu}}{r\sqrt{2}}\left(\varepsilon\sqrt{\varepsilon + r} + \frac{\sigma}{\omega}\sqrt{r-\varepsilon} + i\left(\varepsilon\sqrt{r-\varepsilon} - \frac{\sigma}{\omega}\sqrt{\varepsilon + r}\right)\right), \quad r = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2},$$

и если $\sigma = 0$, то $\rho = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Эта матрица свободна от особенности, описанной в предыдущем абзаце: координата z отсутствует явно, имеется лишь толщина пластины. Кроме того можно заметить, что матрица составлена из двух блоков: «серединка» и «кайма», которые, если не обращать внимания на «нули», похожи с точностью до знака — это следствие того, что поляризация в изотропных средах сохраняется: для изотропных сред нет нужды оперировать матрицами «4×4», достаточно матриц «2×2» (рассматривая лишь две базовые волны, различаемые только направлением переноса энергии).

Заключительные слова по «стопке пластин»

В стопке могут находиться вперемешку пластинки из совершенно разных материалов и разных толщин: изотропные и анизотропные, с различными параметрами холестерической спирали, пластинки из одноосных кристаллов и стёкол, с анизотропным поглощением (дихроизмом) и без него, и даже с экзотическим поглощением магнитного поля за счет гипотетических магнитных зарядов (гипотетичность не мешает моделированию метаповерхностей и метаматериалов). Таким образом, алгоритм решения задачи «стопка пластин» — довольно мощный инструмент для исследования композитных, слоистых сред.

Минуса видится два: ограничение по условию (задача одномерна и вектор $\mathbf{n}$ обязан лежать в плоскости O_{xy}) и множественное перемножение матриц (что затрудняет аналитический вывод ответа в явном виде и, соответственно, анализ финальных выражений).

Уравнение (5), с которого началась одномерная задача, можно решить численно, например прямым интегрированием методами Рунге-Кутты. И чтобы получить ответ конкретной задачи с очень большим количеством пластин, может оказаться дешевле, с точки зрения количества машинных операций и требуемой машинной памяти, интегрировать численно, чем использовать аналитический метод, описанный в данном приложении.